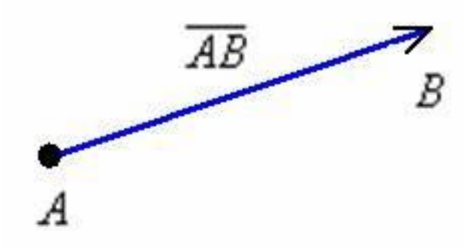
Понятие вектора.

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**. Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

Способы записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:
$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \ldots$ и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:
$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю..

Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является вектор $\overline{c}$.

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

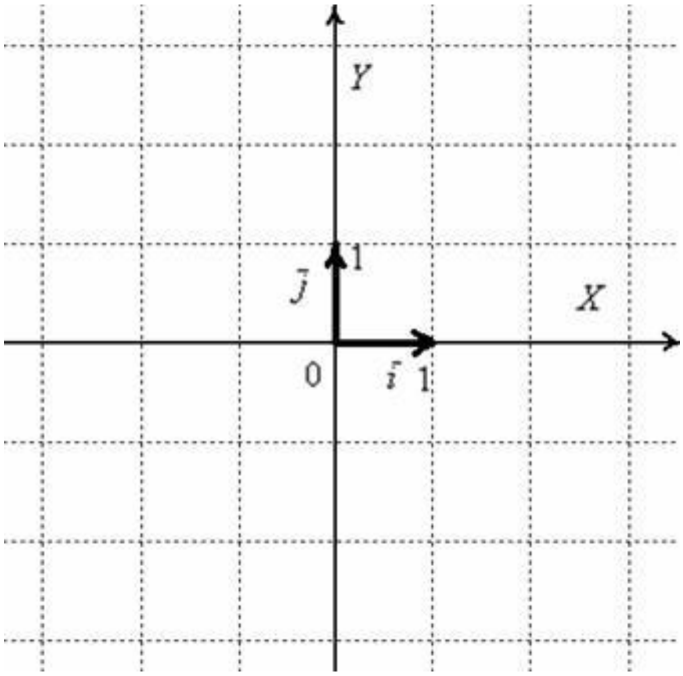
Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\overline{a} \parallel \overline{b}$, при этом возможна детализация: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (векторы сонаправлены) или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (векторы направлены противоположно).

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число λ является такой вектор $\overline{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, причём векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Координаты вектора на плоскости и в пространстве

Рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$:



Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны.

Обозначение: ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\bar{i} \perp \bar{j}$.

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости.

Обозначение: базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: $(\bar{i}\,;\bar{j})$. Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде:
$\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ называется **разложением вектора** $\bar{v}$ **по базису** $(\bar{i}\,;\bar{j})$.

Ужин подан:

Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:
$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:
$\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Пример 1

Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле:
$\overline{AB}(-2-2;\ 3-1) = \overline{AB}(-4;\ 2)$

Как вариант, можно было использовать следующую запись:
$\overline{AB} = (-2-2;\ 3-1) = (-4;\ 2)$

Эстеты решат и так: $\overline{AB} = (-2-2)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

Лично я привык к первой версии записи.

Ответ: $\overline{AB}(-4;\ 2)$

Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Пример 2

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:
$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$

Решение и ответ в конце урока.

Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\bar{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\bar{v}(v_1; v_2; v_3)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Пример 3

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Я взял те же точки, что и в Примере 3.

Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:
$\overline{AB}(1-(-3);\,-3-5)=\overline{AB}(4;\,-8)$

По формуле $|\overline{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ вычислим длину вектора:
$|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Ответ: $|\overline{AB}|=4\sqrt{5}$

Действия с векторами в координатах

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}=(v_1;\,v_2)$ и $\overline{w}=(w_1;\,w_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: $\overline{v}+\overline{w}=(v_1+w_1;\,v_2+w_2)$. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: $\overline{v}-\overline{w}=(v_1-w_1;\,v_2-w_2)$. Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор $\overline{s}=(s_1;\,s_2)$ и найдём сумму трёх векторов: $\overline{v}+\overline{w}+\overline{s}=(v_1+w_1+s_1;\,v_2+w_2+s_2)$

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы $\overline{v}=(v_1;\,v_2;\,v_3)$, $\overline{w}=(w_1;\,w_2;\,w_3)$, то их суммой является вектор $\overline{v}+\overline{w}=(v_1+w_1;\,v_2+w_2;\,v_3+w_3)$.

2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор $\overline{v}=(v_1;\,v_2)$ умножить на число λ, нужно каждую координату данного вектора умножить на число λ:
$\lambda\overline{v}=(\lambda v_1;\,\lambda v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}=(v_1;\,v_2;\,v_3)$ правило такое же:
$\lambda\overline{v}=(\lambda v_1;\,\lambda v_2;\,\lambda v_3)$

<u>Пример 4</u>

Даны векторы $\overline{a}(1;\,-2)$ и $\overline{b}(2;\,3)$. Найти $2\overline{a}$, $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$

Решение чисто аналитическое:
$2\overline{a}=2(1;\,-2)=(2;\,-4)$

$\overline{a}+\overline{b}=(1;\,-2)+(2;\,3)=(1+2;\,-2+3)=(3;\,1)$

$\overline{a}-\overline{b}=(1;\,-2)-(2;\,3)=(1-2;\,-2-3)=(-1;\,-5)$

Ответ: $2\overline{a}=(2;\,-4),\quad \overline{a}+\overline{b}=(3;\,1),\quad \overline{a}-\overline{b}=(-1;\,-5)$

<u>Пример 5</u>

Даны векторы $\overline{a}(0;\,4;\,-7)$ и $\overline{b}(7;\,-9;\,1)$. Найти $3\overline{a}-2\overline{b}$ и $-\overline{a}+4\overline{b}$

Решение: Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:

$$3\overline{a}-2\overline{b}=3(0;4;-7)-2(7;-9;1)=(0;12;-21)-(14;-18;2)=$$
$$=(0-14;12-(-18);-21-2)=(-14;30;-23)$$

$$-\overline{a}+4\overline{b}=-(0;4;-7)+4(7;-9;1)=(0;-4;7)+(28;-36;4)=$$
$$=(0+28;-4-36;7+4)=(28;-40;11)$$

Ответ: $3\overline{a}-2\overline{b}=(-14;30;-23),\quad -\overline{a}+4\overline{b}=(28;-40;11)$

Домашнее задание:

а) Даны точки $A(-4;5)$ и $B(1;-3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2;0), B(-7;1)$ и $C(4;1)$. Найти векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки $F(-2;-1;0)$ и $E(0;-1;-2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10;5;-4), A_2(-8;6;3), A_3(1;1;-1), A_4(0;0;1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$.

д) Даны точки $A(2;3;-1)$ и $B(-5;3;0)$. Найти длину отрезка AB.

е) Даны векторы $\overline{a}(1;-2), \overline{b}(2;0), \overline{c}(-4;2)$. Найти $3\overline{a}-5\overline{b}+\dfrac{1}{2}\overline{c}$ и $-2(\overline{a}-2\overline{c})+4\overline{b}$

Выполненное задание присылать на электронную почту: vm@yapk21.ru