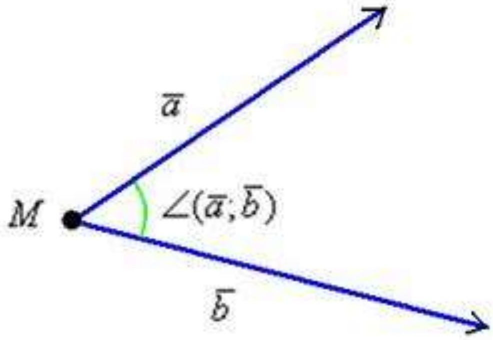
07.04.2020

Тема урока: Скалярное произведение векторов



Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2,\quad |\overline{b}|=5,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае:
$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

Угол между векторами может изменяться в пределах $0\le\angle(\overline{a};\overline{b})\le\pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0<\angle(\overline{a};\overline{b})<\frac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})>0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\overline{a}\overline{b}>0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\overline{a};\overline{b})=0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0=1$, то формула упрощается: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\frac{\pi}{2}<\angle(\overline{a};\overline{b})<\pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})<0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\overline{a}\overline{b}<0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\overline{a};\overline{b})=\pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi=-1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\overline{a}\overline{b}>0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\bar{a}\bar{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\bar{a}\bar{b} = 0$. Обратное тоже верно: если $\bar{a}\bar{b} = 0$, то $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

Угол между векторами

Снова посмотрим на нашу формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:

$$\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$$

А части поменяем местами:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$ – это число? Число. Длины векторов $|\bar{a}|, |\bar{b}|$ – числа? Числа. Значит, дробь $\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ тоже является некоторым числом X. А если известен косинус угла: $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \arccos X$.

<u>Пример 1</u>

Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 4, \quad |\bar{b}| = 2\sqrt{2}, \quad \bar{a}\bar{b} = 8$.

Решение: Используем формулу:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Итак, если $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$$\angle(\bar{a};\bar{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по **тригонометрической таблице**. Хотя случается это редко. В задачах аналитической геометрии значительно чаще появляется какой-нибудь неповоротливый медведь вроде $\arccos\frac{5}{17}$, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор. Собственно, такую картину мы ещё неоднократно увидим.

Ответ: $\angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$ рад. $= 45°$

Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение векторов $\overline{v}(v_1; v_2)$ и $\overline{w}(w_1; w_2)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i}; \overline{j})$, **выражается формулой** $\overline{v} \cdot \overline{w} = v_1w_1 + v_2w_2$

Скалярное произведение векторов $\overline{v}(v_1; v_2; v_3), \overline{w}(w_1; w_2; w_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i}; \overline{j}; \overline{k})$, **выражается формулой** $\overline{v} \cdot \overline{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

То есть, скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат векторов.

Пример 2

Найти скалярное произведение векторов:
а) $\overline{a}(2; -5)$ и $\overline{b}(-1; 0)$
Решение:

$\overline{a}\overline{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 = -2 + 0 = -2$

Проверка векторов на ортогональность с помощью скалярного произведения

Векторы $\overline{v}$ и $\overline{w}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\overline{v} \cdot \overline{w} = 0$. В координатах данный факт запишется следующим образом:
$\overline{v} \perp \overline{w} \Leftrightarrow v_1w_1 + v_2w_2 = 0$ (для векторов плоскости);
$\overline{v} \perp \overline{w} \Leftrightarrow v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$ (для векторов пространства).

Пример 3

Проверить ортогональность векторов: $\overline{a}(1; 2; -4)$ и $\overline{b}(6; -1; 1)$
Решение:
Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:
$\overline{a}\overline{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 = 6 - 2 - 4 = 0$, следовательно, $\overline{a} \perp \overline{b}$

Пример 4

При каком значении λ векторы $\overline{a}(3; \lambda; -2), \overline{b}(2 - \lambda; -1; 5)$ будут ортогональны?

Решение: По условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства $\overline{v}(v_1; v_2; v_3), \overline{w}(w_1; w_2; w_3)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$.

Дело за малым, составим уравнение:
$\overline{a}\overline{b} = 0$
$3 \cdot (2 - \lambda) + \lambda \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 = 0$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$6-3\lambda-\lambda-10=0$$

$$-4\lambda-4=0$$

Решаем простейшее линейное уравнение:

$$-4\lambda=4$$

$$\lambda=-1$$

Ответ: при $\lambda=-1$

Пример 5

Найти скалярное произведение векторов $\bar{c}=\bar{a}-4\bar{b}, \bar{d}=-2\bar{a}-\bar{b}$, если $\bar{a}(5;7), \bar{b}(1;1)$

Решение:

Найдём вектор $\bar{c}$:

$$\bar{c}=\bar{a}-4\bar{b}=(5;7)-4(1;1)=(5;7)-(4;4)=(1;3)$$

Найдём вектор $\bar{d}$:

$$\bar{d}=-2\bar{a}-\bar{b}=-2(5;7)-(1;1)=(-10;-14)-(1;1)=(-11;-15)$$

Вычислим скалярное произведение:

$$\bar{c}\bar{d}=1\cdot(-11)+3\cdot(-15)=-11-45=-56$$

Ответ: $\bar{c}\bar{d}=-56$

Что и говорить, иметь дело с координатами значительно приятнее.

Формула косинуса угла между векторами, которые заданы координатами

Теперь у нас есть полная информация, чтобы ранее выведенную формулу косинуса угла между векторами $\cos\angle(\bar{v};\bar{w})=\dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\cdot|\bar{w}|}$ выразить через координаты векторов $\bar{v},\bar{w}$:

Косинус угла между векторами плоскости $\bar{v}(v_1;v_2)$ и $\bar{w}(w_1;w_2)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j})$, **выражается формулой**:

$$\cos\angle(\bar{v};\bar{w})=\frac{v_1w_1+v_2w_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}}.$$

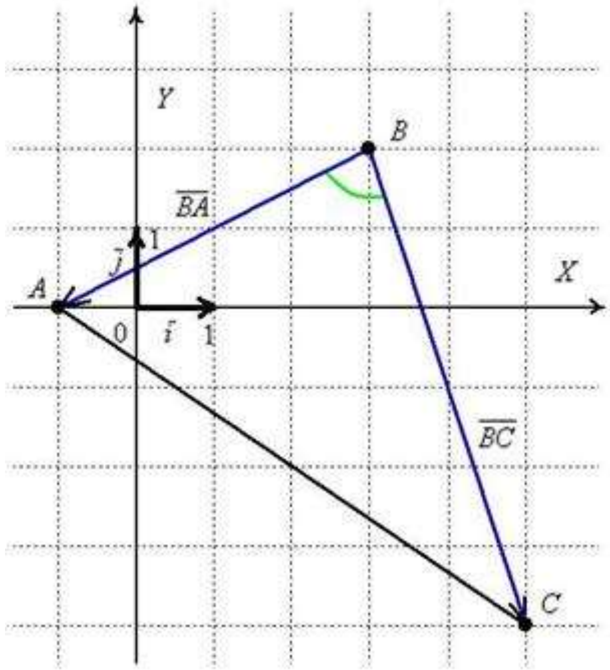
Косинус угла между векторами пространства $\bar{v}(v_1;v_2;v_3), \bar{w}(w_1;w_2;w_3)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$, **выражается формулой**:

$$\cos\angle(\bar{v};\bar{w})=\frac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}$$

Пример 6

Даны три вершины треугольника $A(-1;0), B(3;2), C(5;-4)$. Найти значение cos $\angle ABC$ (угол при вершине B).

Решение: По условию чертёж выполнять не требуется, но всё-таки:



Требуемый угол $\angle ABC$ помечен зелёной дугой. Сразу вспоминаем школьное обозначение угла: $\angle ABC$ – особое внимание на **среднюю** букву B – это и есть нужная нам вершина угла. Для краткости можно было также записать просто $\angle B$.

Из чертежа совершенно очевидно, что угол $\angle ABC$ треугольника совпадает с углом между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, иными словами: $\angle ABC = \angle(\overline{BA}; \overline{BC})$.

Проведённый анализ желательно научиться выполнять мысленно.

Найдём векторы:

$$\overline{BA}(-1-3;\ 0-2) = \overline{BA}(-4;\ -2)$$

$$\overline{BC}(5-3;\ -4-2) = \overline{BC}(2;\ -6)$$

Вычислим скалярное произведение:

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -4\cdot 2 - 2\cdot(-6) = -8 + 12 = 4$$

И длины векторов:

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Косинус угла:

$$\cos\angle(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Можно сразу воспользоваться формулой :

$$\cos\angle(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{-4\cdot 2 - 2\cdot(-6)}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2}} =$$

$$= \frac{-8+12}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{4+36}} = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{800}} = \frac{4}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Домашнее задание:

1. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}\overline{b}$:
а) a(3,4) , b(-2,3)

б) a(-1,-3) , b(0,3)

2. При каком значении λ скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;\lambda), \overline{b}(2;-3)$ будет равно –2?

3. Найти скалярное произведение векторов $3\overline{c}$ и $2\overline{c}+\overline{d}$, если $\overline{c}(0;-3;5), \overline{d}(-4;1;0)$

4. В пространстве задан треугольник координатами своих вершин $A_1(1;1;1), A_2(3;0;0), A_3(2;3;7)$.
Найти cos угола между сторонами A_1A_2 и A_1A_3

ВЫПОЛНЕННОЕ ЗАДАНИЕ СФОТОГРАФИРОВАТЬ И НАПРАВВИТЬ НА ПО ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЕ НА СЛЕДУЮЩИЙ АДРЕС: vm@yapk21.ru