08.04.2020

Тема урока: Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов

Векторное произведение векторов

В данной операции, точно так же, как и в скалярном произведении, участвуют **два вектора**. Пусть это будут $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

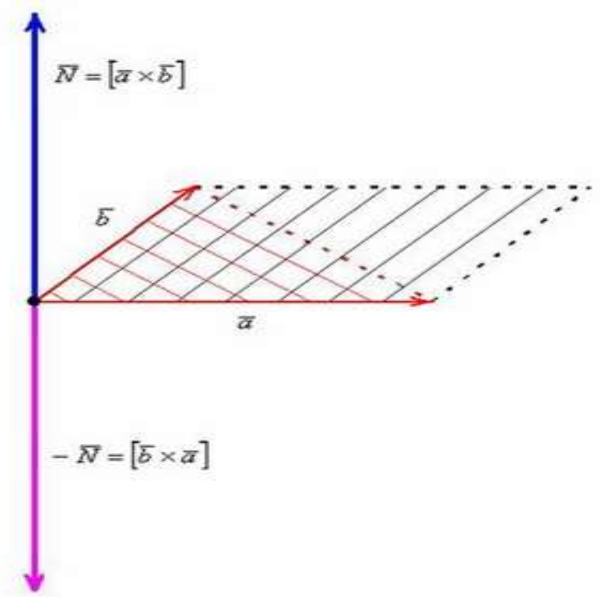
Само действие обозначается следующим образом: $[\bar{a} \times \bar{b}]$.

в **скалярном произведении векторов** $\bar{a} \cdot \bar{b}$ участвуют два вектора, и здесь тоже умножаются два вектора, тогда **в чём разница**? Явная разница, прежде всего, в РЕЗУЛЬТАТЕ:

Результатом скалярного произведения векторов является ЧИСЛО: $\bar{a} \cdot \bar{b} = C$

Результатом векторного произведения векторов является ВЕКТОР: $[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{N}$, то есть умножаем векторы и получаем снова вектор.

Определение: Векторным произведением $[\bar{a} \times \bar{b}]$ неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, взятых в данном порядке, называется ВЕКТОР $\bar{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах; вектор $\bar{N}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направлен так, что базис $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{N})$ имеет правую ориентацию:



ПОЯСНЕНИЯ МК ЧЕРТЕЖУ:

1) Исходные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, обозначенные красными стрелками, по определению **не коллинеарны**. Случай коллинеарных векторов будет уместно рассмотреть чуть позже.

2) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взяты **в строго определённом порядке**: $[\bar{a} \times \bar{b}]$ – **«а» умножается на «бэ»**, а не «бэ» на «а». Результатом умножения векторов является ВЕКТОР $\bar{N} = [\bar{a} \times \bar{b}]$, который обозначен синим цветом. Если векторы умножить в обратном порядке, то получим равный по длине и противоположный по направлению вектор $-\bar{N} = [\bar{b} \times \bar{a}]$ (малиновый цвет). То есть, справедливо равенство $[\bar{a} \times \bar{b}] = -[\bar{b} \times \bar{a}]$.

3) Теперь познакомимся с геометрическим смыслом векторного произведения. Это очень важный пункт! ДЛИНА синего вектора $\overline{N} = [\overline{a} \times \overline{b}]$ (а, значит, и малинового вектора $-\overline{N} = [\overline{b} \times \overline{a}]$) численно равна ПЛОЩАДИ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. На рисунке данный параллелограмм заштрихован чёрным цветом.

***Примечание**: чертёж является схематическим, и, естественно, номинальная длина векторного произведения не равна площади параллелограмма.*

Пример 1

а) Найти длину векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 3, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$

б) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 3, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$

Решение: Нет, это не опечатка, исходные данные в пунктах условия я намеренно сделал одинаковыми. Потому что оформление решений будет отличаться!

а) По условию требуется найти **длину** вектора (векторного произведения). По соответствующей формуле:

$$\left|[\overline{a} \times \overline{b}]\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\angle(\overline{a};\overline{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $\left|[\overline{a} \times \overline{b}]\right| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

Коль скоро спрашивалось о длине, то в ответе указываем размерность – единицы.

б) По условию требуется найти **площадь** параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Площадь данного параллелограмма численно равна длине векторного произведения:

$$S_{п-грамма} = \left|[\overline{a} \times \overline{b}]\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\angle(\overline{a};\overline{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $S_{п-грамма} = 3\sqrt{3}$ ед^2. $\approx 5{,}20$ ед^2.

Свойства векторного произведения векторов

Некоторые свойства векторного произведения мы уже рассмотрели, тем не менее, я их включу в данный список.

Для произвольных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и произвольного числа λ справедливы следующие свойства:

1) $[\overline{a} \times \overline{a}] = \overline{0}$ В других источниках информации данный пункт обычно не выделяют в свойствах, но он очень важен в практическом плане. Поэтому пусть будет.

2) $[\overline{a} \times \overline{b}] = -[\overline{b} \times \overline{a}]$ – свойство тоже разобрано выше, иногда его называют **антикоммутативностью**. Иными словами, порядок векторов имеет значение.

3) $[\lambda\overline{a} \times \overline{b}] = \lambda[\overline{a} \times \overline{b}], \quad [\overline{a} \times (\lambda\overline{b})] = \lambda[\overline{a} \times \overline{b}]$ – сочетательные или **ассоциативные** законы векторного произведения. Константы безпроблемно выносятся за пределы векторного произведения. Действительно, чего им там делать?

4) $[(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}]=[\overline{a}\times\overline{c}]+[\overline{b}\times\overline{c}],\quad [\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})]=[\overline{a}\times\overline{b}]+[\overline{a}\times\overline{c}]$ – распределительные или **дистрибутивные** законы векторного произведения. С раскрытием скобок тоже нет проблем.

В качестве демонстрации рассмотрим коротенький пример:

<u>Пример 2</u>

Найти $\left|[-3\overline{a}\times 2\overline{b}]\right|$, если $|\overline{a}|=\frac{1}{2},\quad |\overline{b}|=\frac{1}{6},\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{2}$

Решение: По условию снова требуется найти длину векторного произведения. Распишем нашу миниатюру:

(1) Согласно ассоциативным законам, выносим константы за переделы векторного произведения.

(2) Выносим константу за пределы модуля, при этом модуль «съедает» знак «минус». Длина же не может быть отрицательной.

$$\left|[-3\overline{a}\times 2\overline{b}]\right| \overset{(1)}{=}$$

$$= \left|-3\cdot 2[\overline{a}\times\overline{b}]\right| \overset{(2)}{=}$$

$$= 6\cdot\left|[\overline{a}\times\overline{b}]\right| \overset{(3)}{=}$$

$$= 6\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\angle(\overline{a};\overline{b}) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Векторное произведение векторов в координатах

Векторное произведение векторов $\overline{v}(v_1;\, v_2;\, v_3),\ \overline{w}(w_1;\, w_2;\, w_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i};\,\overline{j};\,\overline{k})$, **выражается формулой**:

$$[\overline{v}\times\overline{w}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\overline{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\overline{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\cdot\overline{k}$$

<u>Пример 3</u>

Найти векторное произведение векторов $\overline{a}(-1;\,2;\,-3),\ \overline{b}(0;\,-4;\,1)$ и его длину.

Решение: Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), и во-вторых, его длину.

1) Найдём векторное произведение:

$$\overline{N} = [\overline{a}\times\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot\overline{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\overline{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\cdot\overline{k} =$$

$$= (2-12)\cdot\overline{i} - (-1-0)\cdot\overline{j} + (4-0)\cdot\overline{k} = -10\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$$

2) Вычислим длину векторного произведения. Используем простейшую формулу для вычисления длины вектора, которая рассматривалась на уроке Векторы для чайников:

$$|\overline{N}| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100+1+16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

Ответ: $\overline{N} = -10\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k},\quad |\overline{N}| = 3\sqrt{13}$ е

Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение векторов – это произведение трёх векторов: $(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$

Вот так вот они выстроились паровозиком и ждут, не дождутся, когда их вычислят.

Определение: Смешанным произведением $(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$ некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, взятых в данном порядке, называется объём параллелепипеда, построенного на данных векторах, снабжённый знаком «+», если базис $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ правый, и знаком «–», если базис $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ левый.

Смешанное произведение векторов $\overline{v}(v_1;v_2;v_3),\overline{w}(w_1;w_2;w_3),\overline{s}(s_1;s_2;s_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i};\overline{j};\overline{k})$ правой ориентации, **выражается формулой**:

$$p=(\overline{v}\cdot\overline{w}\cdot\overline{s})=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\\ s_1 & s_2 & s_3\end{vmatrix}$$

Если векторы $\overline{v},\overline{w},\overline{s}$ **компланарны**, то $$p=(\overline{v}\cdot\overline{w}\cdot\overline{s})=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\\ s_1 & s_2 & s_3\end{vmatrix}=0$$

<u>Пример 4</u>

Даны векторы $\overline{a}(1;-1;2),\overline{b}(0;4;3),\overline{c}(3;2;-6)$.

Вычислить:
а) смешанное произведение векторов;
б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$;

Решение:

а) По формуле смешанного произведения:

$$p=(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 3 & 2 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3\\ 2 & -6\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(-24-6)+3\cdot(-3-8)=-30-33=-63$$

(Определитель раскрыт по первому столбцу)

б) Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, равен модулю смешанного произведения данных векторов:
$V_{п-пипеда}=|p|=|-63|=63$ ед^3.

Домашнее задание:

1. Найти векторное произведение векторов $\overline{a}($2,-3,1) и $\overline{b}($-2,3,0) и его длину.

2. Найти смешанное произведение $(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})$ векторов a(2,3,-1), b (-1,2,1),c(2,-1,2)

3.Доказать, что векторы некомпланарны a(1,0,-1), b (-1,1,1),c(1,-1,1)

4.Доказать, что векторы компланарны a(1,-1,2), b (0,1,-1),c(2,-2,4)

Домашнее задание решите в тетради, сфотографируйте и отправьте на электронную почту: vm@yapk21.ru