Урок 1-2 06.04.2020

Тема урока: Аксиомы стереометрии

Изучите материал данный по ссылкам ниже:

1. https://www.yaklass.ru/p/geometria/10-klass/aksiomy-stereometrii-10438/aksiomy-stereometrii-i-ikh-prosteishie-sledstviia-9252/re-c0090990-dec8-4417-8427-26130c2d5cfd
2. https://www.yaklass.ru/p/geometria/10-klass/aksiomy-stereometrii-10438/aksiomy-stereometrii-i-ikh-prosteishie-sledstviia-9252/re-71fbb381-8eed-4ca5-b9b7-264d9d3ee120
3. https://www.yaklass.ru/p/geometria/10-klass/aksiomy-stereometrii-10438/aksiomy-stereometrii-i-ikh-prosteishie-sledstviia-9252/re-325b23ad-df13-4cb3-ac0f-397dc7ba8da4
4. https://www.yaklass.ru/p/geometria/10-klass/aksiomy-stereometrii-10438/aksiomy-stereometrii-i-ikh-prosteishie-sledstviia-9252/re-801b3378-2801-4e17-8882-f70e0882967e

Ссылка на видео:
https://youtu.be/n1BI5pWlKdU

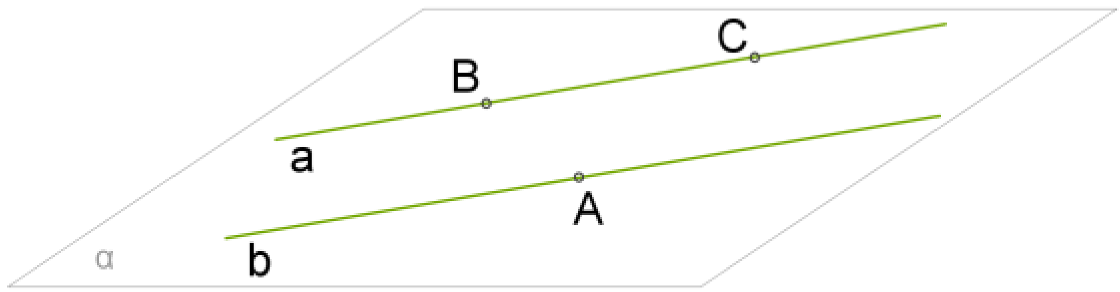
Урок 3 06.04.2020

Тема урока: Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются параллельными, если лежат в одной плоскости и не пересекаются.

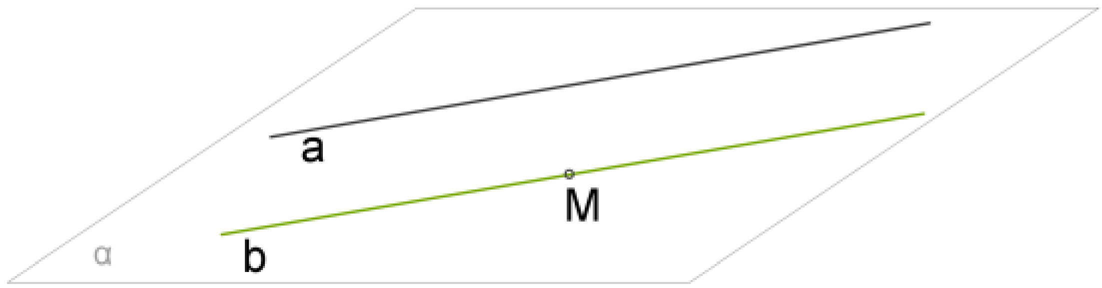
Параллельность прямых a и b обозначается так: a||b илиb||a.

Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



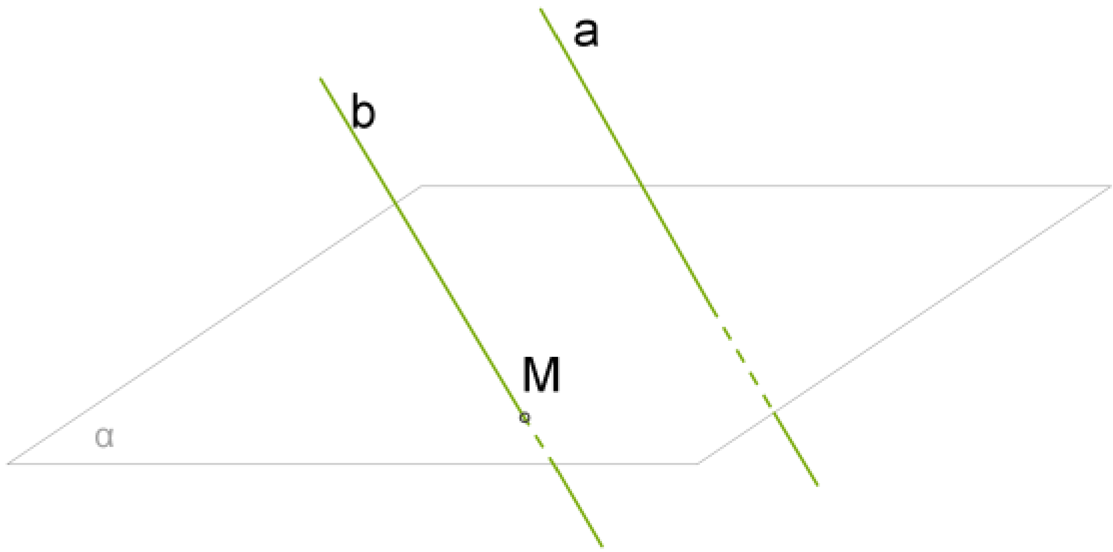
Доказательство:
1. так как прямые a и b параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость α.
2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой a обозначаем точки B и C, а на прямой b — точку A.
3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то α является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые a и b.

Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притом только одну.

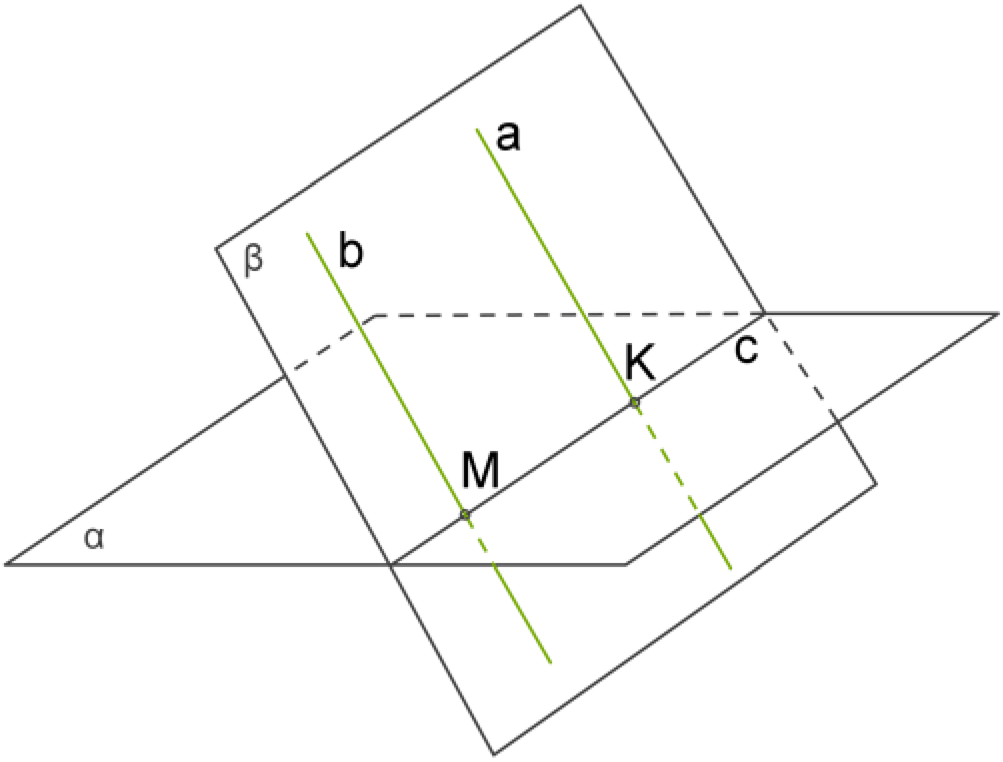


Доказательство:
1. через данную прямую a и точку M, которая не лежит на прямой, проводится плоскость α.
2. Такая плоскость только одна (т. к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).
3. А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b, которая параллельна прямой a.

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



(1 рис.)



(2 рис.)

Доказательство:
рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M (1 рис.).

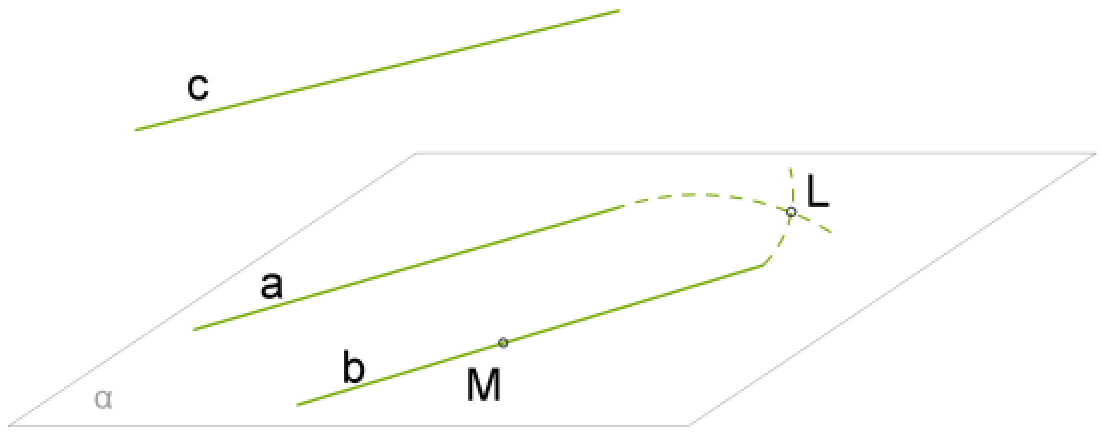
Из 1-й теоремы известно, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β.

Так как точка M находится на прямой b, то M также принадлежит плоскости β (2 рис.). Если у плоскостей α и β есть общая точка M, то у этих плоскостей есть общая прямая c, которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые a, b и c находятся в плоскости β.
Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую c, то вторая прямая a тоже пересекает c.

Точку пересечения прямых a и c обозначим за K.
Так как точка K находится на прямой c, то K находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α.
Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке K.

Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



Дано: a∥cиb∥c.
Доказать: a∥b.
Доказательство:
выберем точку M на прямой b.
Через точку M и прямую a, которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:
1) прямая b пересекает плоскость α; или 2) прямая b находится в плоскости α.

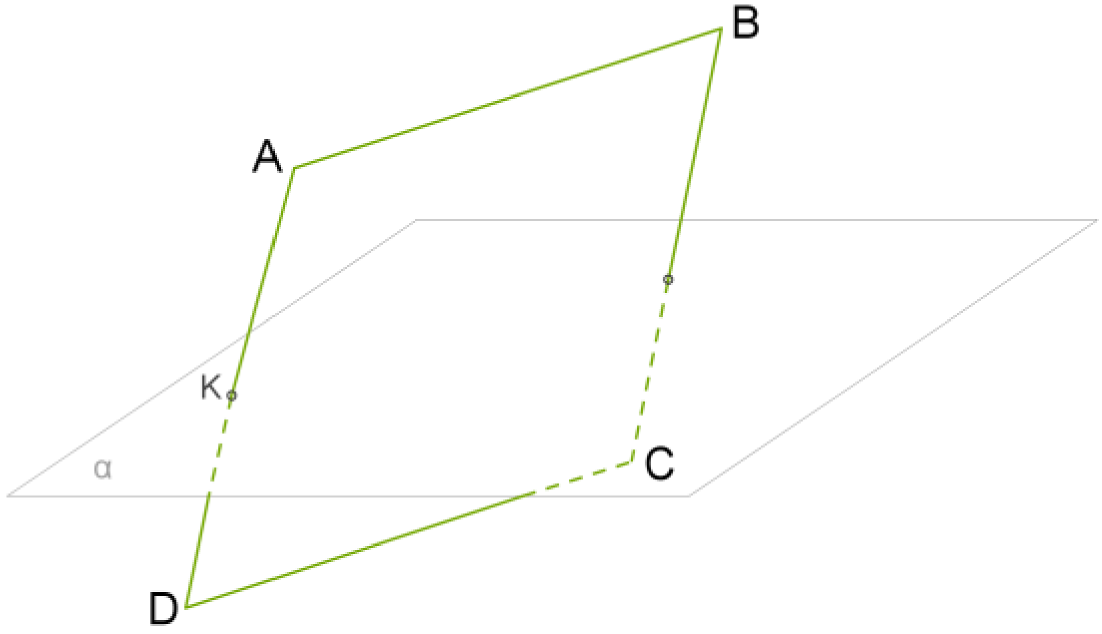
Пусть прямая b пересекает плоскость α.
Значит, прямая c, которая параллельна прямой b, тоже пересекает плоскость α. Так как a∥c, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α. Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α, является неверным.
Значит, прямая b находится в плоскости α.

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.
Пусть у прямых a и b есть общая точка L.
Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b, которые параллельны прямой c. Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.
Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α, и у них нет общих точек, то они параллельны.

Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется пучком параллельных прямых.

Выводы:
1) любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.
2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: еслиa∥bиb∥c,тоa∥c.

Пример:
одна сторона параллелограмма пересекает плоскость. Докажите, что прямая, которая содержит противоположную сторону параллелограмма, тоже пересекает эту плоскость.



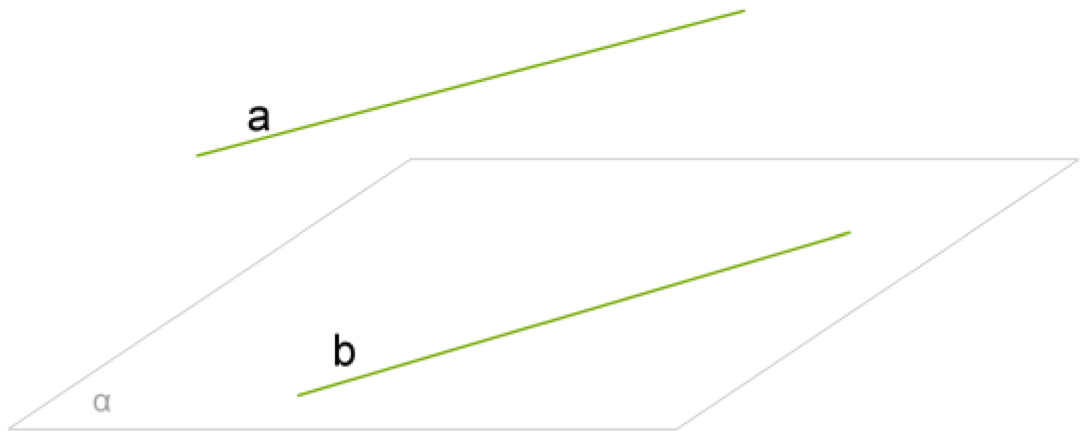
Допустим, что у параллелограмма ABCD сторона AD пересекает плоскость α в точке K.
Так как противоположные стороны параллелограмма параллельны, то, согласно третьей теореме, прямая, которая содержит сторону CD, тоже пересекает плоскость α.

2. Параллельность прямой и плоскости

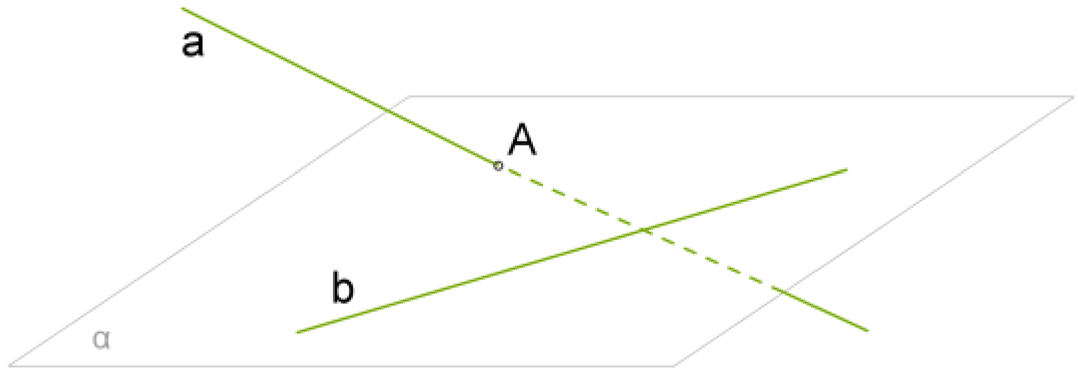
Согласно аксиомам, если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:
1) прямая лежит (находится) в плоскости;
2) прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются);
3) прямая и плоскость не имеют общих точек.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 5 «Признак параллельности прямой и плоскости».
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.



Доказательство:
доказательство проведём от противного. Пусть a не параллельна плоскости α, тогда прямая a пересекает плоскость в некоторой точке A. Причём A не находится на b, так как a∥b. Согласно признаку скрещивающихся прямых, прямые a и b — скрещивающиеся.

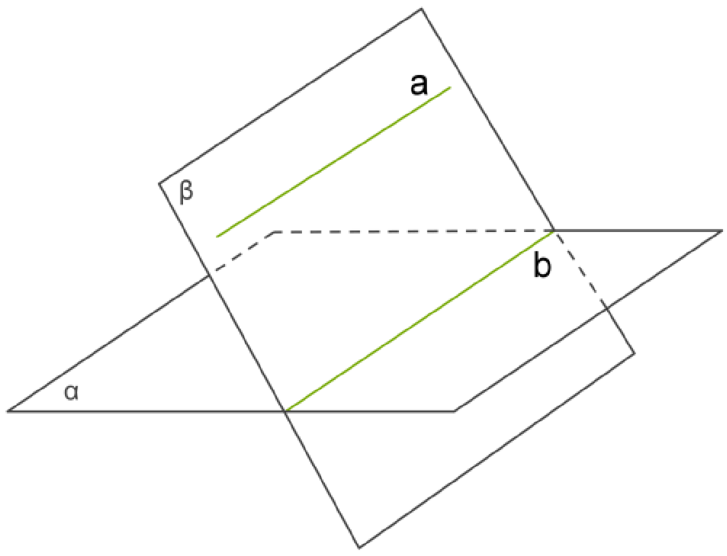


Мы пришли к противоречию. Так как согласно данной информации a∥b, они не могут быть скрещивающимися. Значит, прямая a должна быть параллельна плоскости α.

Обрати внимание!

Следующие две теоремы очень часто используются при решении задач.

Теорема 6.
Если плоскость β проходит через данную прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость по прямой b, то b∥a.



Обрати внимание!

Прямую b иногда называют следом плоскости β на плоскости α.

Теорема 7.
Если одна из двух параллельных прямых a∥b параллельна данной плоскости α, то другая прямая либо параллельна этой плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Ссылка на видео:

[*https://youtu.be/c4K6SmCz5VU*](https://youtu.be/c4K6SmCz5VU)

Урок 4:Тема урока: Взаимное расположение прямых в пространстве

Как известно из курса планиметрии, две прямые в плоскости могут пересекаться (имеют общую точку) или быть параллельными (не имеют общую точку).
В пространстве мы можем представить ситуацию, когда две прямые не пересекаются, но они и не параллельны.

Одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой

Кабели моста

Горизонтальные линии крыши и вертикальные линии стен

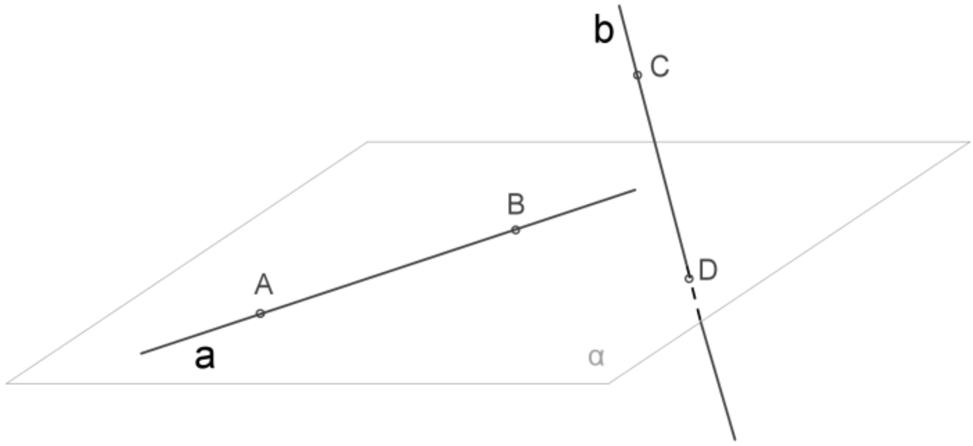
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Теорема «Признак скрещивающихся прямых»

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости, и прямую CD, которая пересекает плоскость в точке D, не лежащей на прямой AB.

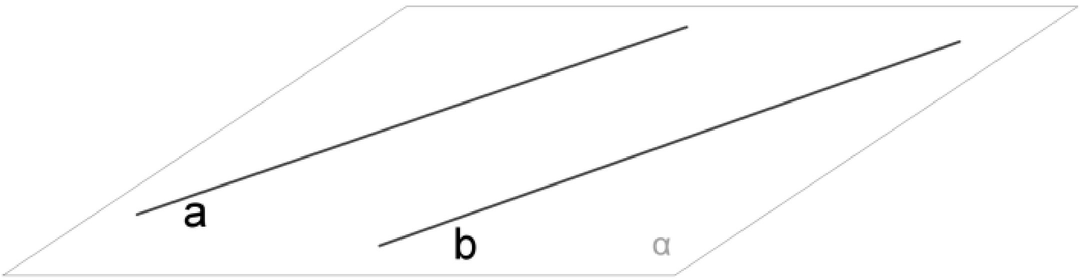


1. Допустим, что прямые AB и CD всё-таки лежат в одной плоскости.
2. Значит, эта плоскость идёт через прямую AB и точку D, то есть, она совпадает с плоскостью α.
3. Это противоречит условиям теоремы, по которым прямая CD не находится в плоскости α, а пересекает её.

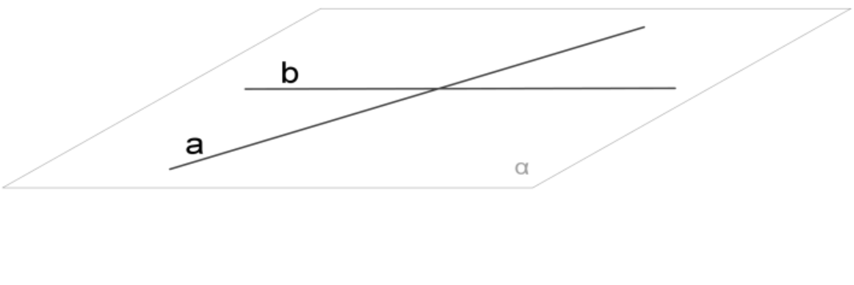
Теорема доказана.

В пространстве прямые расположены следующим образом:

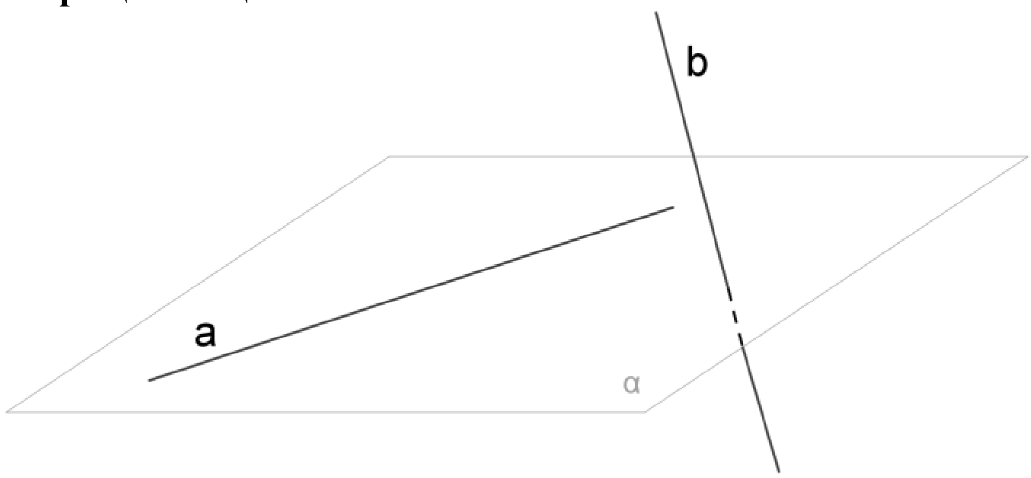
1. параллельные;



2. пересекающиеся;



3. скрещивающиеся.

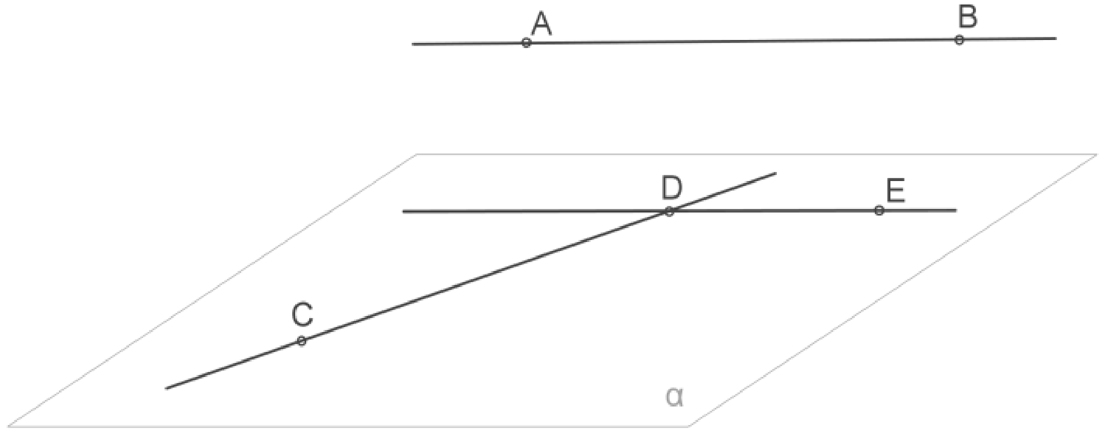


Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD.



1. Через точку D можно провести прямую DE, параллельную AB.
2. Через пересекающиеся прямые CD и DE можно провести плоскость α.
3. Так как прямая AB не лежит в этой плоскости и параллельна прямой DE, то она параллельна плоскости.
4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через CD, будет пересекаться с DE и AB, которая ей параллельна.

Теорема доказана.

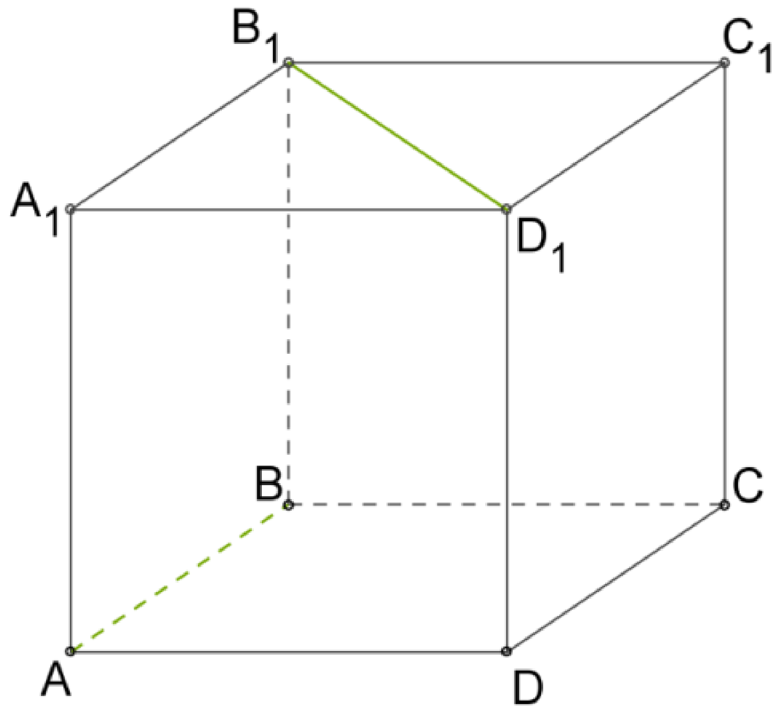
Углы между прямыми

1. Если прямые параллельны, то угол между ними — 00.
2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол 900).
3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

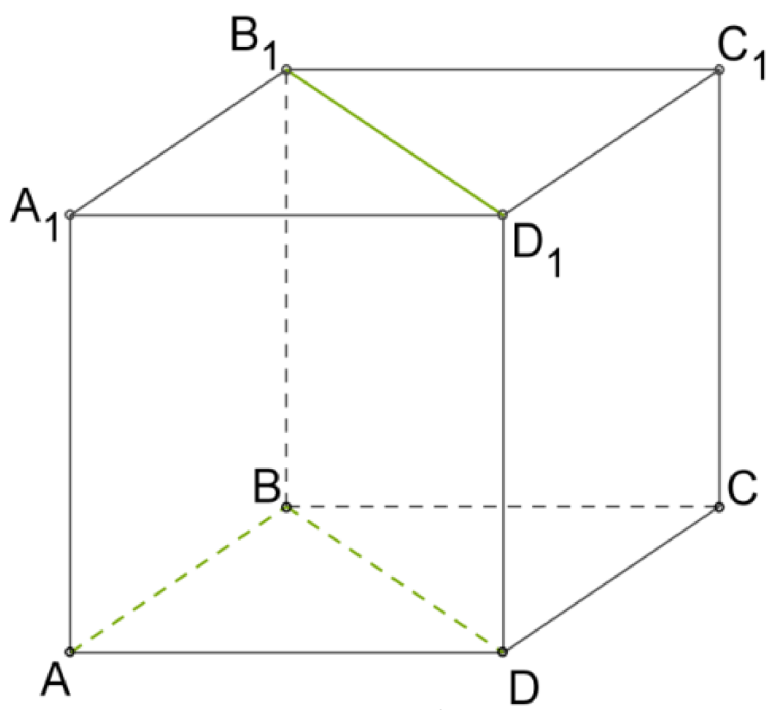
Обрати внимание!

Провести соответственные прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым, можно через любую точку. Иногда удобно выбрать эту точку на одной из данных скрещивающихся прямых и провести через эту точку прямую, параллельную другой из скрещивающихся прямых.

Пример:
дан куб ABCDA1B1C1D1.



Найти угол между AB *и* B1D1.
Выберем точку B *на прямой* AB *и проведём через* B *прямую* BD *параллельно* B1D1.



Угол между AB *и* BD — 45^0*, так как* ABCD — *квадрат.*
Соответственно, угол между AB *и* B1D1 — *тоже* 45^0.

Ссылка на видео:

https://www.youtube.com/watch?v=A3bKQ0lfdqw

Задание: Выполните в тетради краткий конспект этих тем.

Фотоотчет пришлите мне на электронную почту: kab41@yapk21.ru